

# “Método gráfico para valuación de Opciones en árboles n-nomiales”

J. Agustín Cano Garcés

## Introducción

Es bien conocida la utilización de árboles binomiales para modelar la evolución del precio del subyacente en el proceso de cálculo del precio de derivados financieros. El modelo supone que partiendo del precio actual del subyacente, **solamente** se pueden tener dos posibles precios en el siguiente periodo.

Bajo este supuesto **siempre** se puede determinar un portafolio, integrado por una cierta cantidad del subyacente junto con un bono, que replica exactamente el pago que se obtendría con el derivado, es decir, para cada uno de los dos posibles precios del subyacente, el valor del portafolio coincide con el **payoff** correspondiente del derivado.

Así, el precio del derivado está determinado por el valor actual del portafolio, ya que ambos proporcionan el mismo pago al final. Adicionalmente, bajo ciertas suposiciones, que siempre se satisfacen cuando el mercado está en equilibrio, se puede estimar la llamada probabilidad riesgo-neutral, que puede ser utilizada para calcular el valor esperado de los pagos del derivado, cuyo valor presente es precisamente el precio del mismo, lo que constituye un método alternativo para su cálculo.

Abandonando la suposición de solamente dos valores para el precio del subyacente, y permitiendo tres, cuatro, ó más, se obtienen árboles trinomiales, cuatrinomiales, en general, árboles n-nomiales. La situación ideal del modelo binomial ya no se preserva: no es posible obtener un portafolio (con únicamente dos instrumentos) que replique los pagos del derivado, ni tampoco se puede calcular la probabilidad riesgo-neutral.

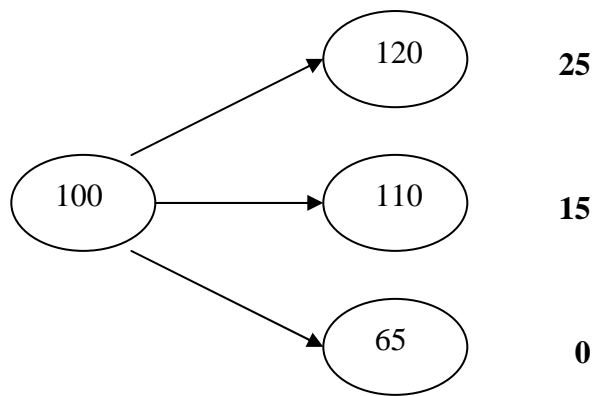
Sin embargo, recurriendo a la Programación lineal, es posible determinar cotas inferiores y superiores para el valor del derivado, que en el caso binomial coinciden y determinan unívocamente su valor.

Seguramente muchos de los lectores del presente trabajo han olvidado, ó no conocen, los métodos de resolución de problemas de Programación lineal, en especial la tabla simplex, que tantos “dolores de cabeza” provocó en algunos. Por esa razón, y recurriendo a la teoría de la Dualidad, aquí se presenta un método gráfico que proporciona, de manera **muy simple e inmediata**, respuestas para el caso de cualquier árbol n-nomial.

## Modelo trinomial

Antes de proceder al desarrollo algebraico de la aplicación de la Programación lineal se presentará un ejemplo numérico para mayor claridad.

Considérese un subyacente cuyo precio actual es 100, que evoluciona de acuerdo al árbol que se presenta, y sobre el cual se tiene un **call** con precio de ejercicio 95, y donde la tasa de interés libre de riesgo del mercado es  $r = 0.10$  por el periodo. A un lado de los vértices terminales del árbol se muestra el **payoff** ó pago para cada uno de los tres posibles precios finales.



No es posible, en general, determinar un portafolio con solamente **dos** instrumentos, que replique exactamente los **tres** posibles pagos de un derivado. Por lo que solamente será factible determinar valores mínimos y máximos para el precio del derivado.

Se considerarán portafolios compuestos por una cantidad  $\Delta$  del subyacente junto con un bono cuyo valor al vencimiento es una cantidad  $B$ . Si se supone que el valor de estos, al final del periodo, es siempre inferior ó igual al pago correspondiente del derivado, entonces el valor del derivado hoy,  $V$ , será mayor ó igual al valor del portafolio hoy, es decir

$$V \geq \Delta(100) - \frac{1}{1.05} B$$

en particular

$$V \geq \max \left( \Delta(100) - \frac{1}{1.05} B \right)$$

por lo que se desearía determinar la composición del mismo que maximizara su valor hoy, es decir, determinar el **mínimo** valor para el derivado.

Planteando el modelo de programación lineal correspondiente, determinar el valor de  $\Delta$  y  $B$  tales que:

$$(P^3) \quad \left| \begin{array}{l} \max z = \Delta(100) - \frac{1}{1.05} B \\ sc \\ \Delta(120) - B \leq 25 \\ \Delta(110) - B \leq 15 \\ \Delta(65) - B \leq 0 \end{array} \right.$$

En lugar de resolver directamente este problema se procederá a plantear y resolver el problema dual asociado, sabiendo que en el óptimo, los valores de ambas funciones objetivo coinciden, es decir, se calculará indirectamente el valor máximo de  $z$ . Hay que recordar que el número de variables en el problema dual es igual al número de restricciones en el problema inicial, y que el número de restricciones en el dual coincide con el número de variables en el original, además de transponer la matriz de coeficientes, lo que da:

$$(D^3) \quad \left| \begin{array}{l} \min w = 25\pi_1 + 15\pi_2 + 0\pi_3 \\ sc \\ \pi_1(120) + \pi_2(110) + \pi_3(65) = 100 \\ -\pi_1 - \pi_2 - \pi_3 = -\frac{1}{1.05} \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

y realizando un cambio de variables:

$$(D^3) \quad \left| \begin{array}{l} \pi_1^* = (1.05)\pi_1 \quad \pi_2^* = (1.05)\pi_2 \quad \pi_3^* = (1.05)\pi_3 \\ \min w = \frac{1}{1.05} [25\pi_1^* + 15\pi_2^* + 0\pi_3^*] \\ sc \\ \pi_1^*(120) + \pi_2^*(110) + \pi_3^*(65) = 100(1.05) \\ \pi_1^* + \pi_2^* + \pi_3^* = 1 \\ \pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^* \geq 0 \end{array} \right.$$

Un punto que es necesario destacar es que las nuevas variables pueden ser interpretadas como probabilidades, tres probabilidades asociadas a los tres posibles valores del subyacente; además corresponderían a las probabilidades riesgo-neutral, ya que el “valor esperado” del precio del subyacente sería igual a aplicar la tasa libre de riesgo al precio actual.

Otro punto a destacar es que el valor mínimo de  $w$  es la máxima **cota inferior** para el valor del derivado, y, finalmente, que el valor óptimo de las variables no cambia si se multiplica el valor de la función objetivo por una constante positiva, por ejemplo, por 1.05

Para resolver este problema se puede utilizar el método simplex, ó se podría recurrir al método gráfico, que en este caso supondría graficar las restricciones y diferentes valores de la función objetivo en un espacio tridimensional! Habría que imaginarse que sucede con un árbol n-nomial!

El método propuesto en este trabajo consiste en plantear este problema en un espacio bidimensional: eje horizontal asociado a valores del precio del subyacente, y eje vertical asociado a valores de  $w$ , para **cualquier** árbol n-nomial.

Reescribiendo el problema anterior:

$$\min w$$

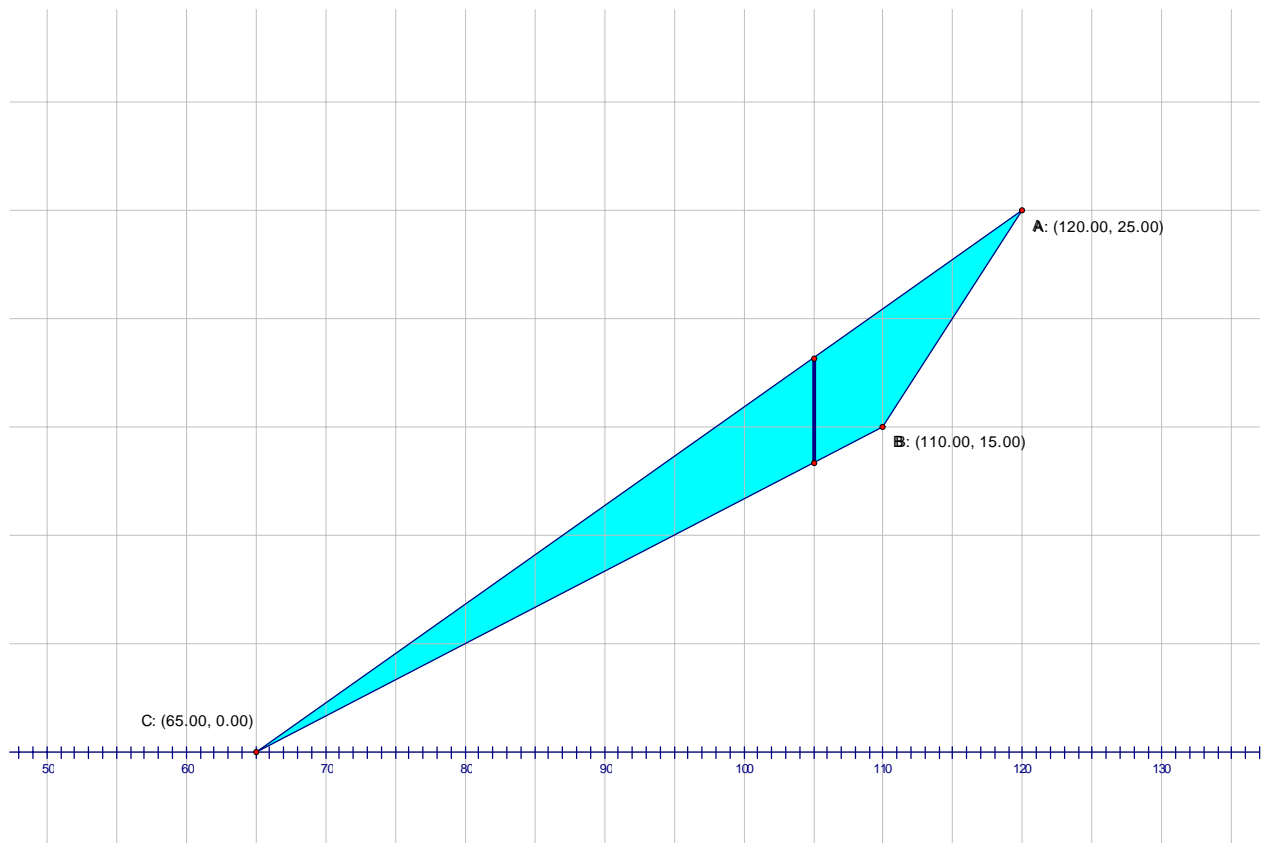
sc

$$\begin{pmatrix} 120 \\ 25 \end{pmatrix} \pi_1^* + \begin{pmatrix} 110 \\ 15 \end{pmatrix} \pi_2^* + \begin{pmatrix} 65 \\ 0 \end{pmatrix} \pi_3^* = \begin{pmatrix} 100(1.05) \\ w \end{pmatrix}$$

$$\pi_1^* + \pi_2^* + \pi_3^* = 1$$

$$\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^* \geq 0$$

que así puede ser interpretado como obtener una combinación lineal convexa de los puntos en  $\mathbb{R}^2$  asociados a las parejas  $\begin{pmatrix} \text{precio} \\ \text{payoff} \end{pmatrix}$  de tal manera que el valor de la segunda componente sea mínimo.



La región sombreada representa la envolvente convexa de los puntos  $(120, 25)$ ,  $(110, 15)$ , y  $(65, 0)$ . Para cualquier valor de  $S^*(1+r)$  en el intervalo de 65 a 120 se obtienen todos los posibles valores de  $w$  asociados a soluciones factibles del problema  $(D^3)$  transformado, en particular para  $100 \cdot (1.05) = 105$ , se presenta el segmento correspondiente a dichos valores.

El mínimo de  $w$  corresponde al punto inferior del segmento; se calculará a través de la obtención de la ecuación de la recta asociada al segmento **BC**:

$$\text{pendiente} = (15-0)/(110-65) = 1/3$$

$$\text{ordenada al origen} = 0 - (1/3) \cdot 65$$

$$w_{\min} = (1/3)*105 - (1/3)*65$$

y dividiendo entre 1.05, que fue la constante por la que se había modificado el objetivo

$$V \geq \frac{1}{3}(100) - \frac{1}{1.05} \left( \frac{65}{3} \right) = 12.698413$$

Como subproducto de estos cálculos se obtiene el portafolio de **máximo valor** cuyos valores al final del periodo son menores o iguales a los pagos del derivado en cada uno de los tres casos, y que consiste en una cantidad  $\Delta$  del subyacente junto con un bono cuyo valor al vencimiento es una cantidad B:

$\Delta$  = pendiente

$B$  = - ordenada al origen

Además, es posible obtener, a partir de la gráfica, un conjunto de probabilidades riesgo-neutral con las que también se puede calcular la cota inferior para el valor del derivado, y que corresponden a los tres valores óptimos de  $\pi^*$  que se asocian a cada uno de los vértices de la región, respectivamente:

$$\pi_1^* = 0 \quad , \quad \pi_2^* = \frac{105 - 65}{110 - 65} \quad , \quad \pi_3^* = \frac{110 - 105}{110 - 65}$$

Habiendo determinado una cota inferior para el valor del derivado, se procede de manera análoga para la determinación de una cota superior. Se trata de considerar portafolios compuestos de una cantidad  $\Delta$  del subyacente y un bono con valor al vencimiento B, tales que sus valores al final del periodo sean mayores ó iguales al respectivo payoff del derivado, y de entre ellos, escoger el que tenga mínimo valor, con lo que se tendrá

$$V \leq \min \left( \Delta(100) - \frac{1}{1.05} B \right)$$

Ahora el problema de Programación lineal asociado es

$$(P) \quad \left| \begin{array}{l} \min z = \Delta(100) - \frac{1}{1.05} B \\ sc \\ \Delta(120) - B \geq 25 \\ \Delta(110) - B \geq 15 \\ \Delta(65) - B \geq 0 \end{array} \right.$$

Considerando el dual de este problema, y aplicando las transformaciones propuestas en los párrafos anteriores se llega exactamente al mismo problema dual, con la salvedad de que en lugar de minimizar  $w$ , ahora se debe obtener el máximo de  $w$ . En particular, la gráfica necesaria para este problema es la misma gráfica anterior, pero ahora la solución óptima corresponde al extremo superior del segmento de recta ahí dibujado, y que está sobre **AC**.

Al calcular  $\Delta$ , la pendiente de esa recta, así como  $B$ , negativo de la ordenada al origen, y las probabilidades riesgo-neutral se obtiene:

$$\Delta = \frac{25-0}{120-65} = \frac{5}{11} \quad , \quad B = -\left(0 - \frac{5}{11}(65)\right)$$

$$\pi_1^* = \frac{105-65}{120-65} \quad , \quad \pi_2^* = 0 \quad , \quad \pi_3^* = \frac{120-105}{120-65}$$

es decir  $w_{\max} = (5/11)*105 - (5/11)*65$

y dividiendo entre 1.05, que fue la constante por la que se había modificado el objetivo

$$V \leq \frac{5}{11}(100) - \frac{1}{1.05}\left(65 * \frac{5}{11}\right) = 17.316017$$

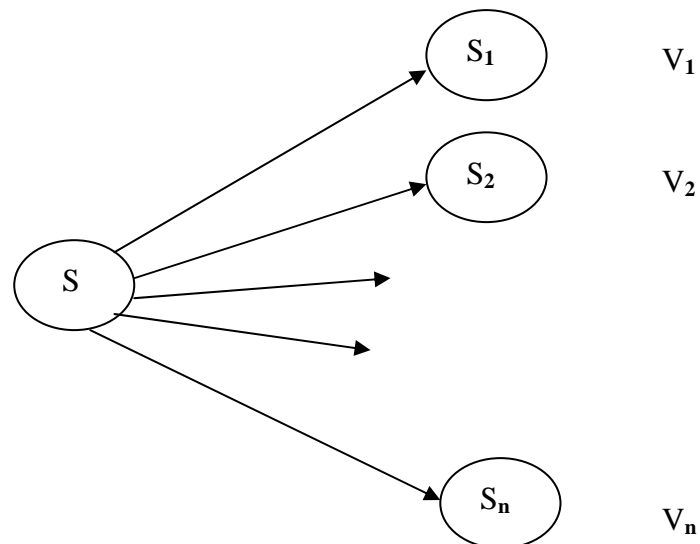
valor que coincide, obviamente, con

$$\frac{1}{1.05} \left[ \left( \frac{105-65}{120-65} \right) * 25 + (0) * 15 + \left( \frac{120-105}{120-65} \right) * 0 \right] = 17.316017$$

$$\therefore 12.698413 \leq V \leq 17.316017$$

## Modelo n-nomial

Generalizando la situación anterior



Un subyacente que puede alcanzar n posibles valores al final del periodo, junto con los n posibles pagos de **cualquier** derivado que dependa del precio final del subyacente. También interviene la tasa libre de riesgo del mercado, r por el periodo, junto con bonos cupón cero con vencimiento al final del periodo.

Siguiendo los pasos planteados en el ejemplo numérico de la sección precedente, se considerarán portafolios compuestos por una cierta cantidad  $\Delta$  del subyacente junto con un bono con valor al vencimiento  $B$ . Suponiendo que el valor de estos al final del periodo no supera al payoff correspondiente del derivado, entonces se puede afirmar que hoy, al inicio del periodo, el valor del derivado,  $V$ , satisface

$$V \geq \Delta(S) - \frac{1}{1+r} B$$

en particular

$$V \geq \max \left( \Delta(S) - \frac{1}{1+r} B \right)$$

por lo que se desearía determinar la composición del mismo que maximizara su valor hoy, es decir, determinar el **mínimo** valor para el derivado.

Planteando el modelo de programación lineal correspondiente, determinar el valor de  $\Delta$  y  $B$  tales que:

$$(P^n) \quad \left| \begin{array}{l} \max z = \Delta(S) - \frac{1}{1+r} B \\ sc \\ \Delta(S_1) - B \leq V_1 \\ \Delta(S_2) - B \leq V_2 \\ \vdots \\ \Delta(S_n) - B \leq V_n \end{array} \right.$$

Una vez más, en lugar de resolver directamente este problema se procederá a plantear y resolver el problema dual asociado, recordando que en el óptimo, los valores de ambas funciones objetivo coinciden, es decir, se calculará indirectamente el valor máximo de  $z$ .

$$(D^n) \quad \left| \begin{array}{l} \min w = V_1 \pi_1 + V_2 \pi_2 + \dots + V_n \pi_n \\ sc \\ \pi_1(S_1) + \pi_2(S_2) + \dots + \pi_n(S_n) = S \\ -\pi_1 - \pi_2 - \dots - \pi_n = -\frac{1}{1+r} \\ \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \geq 0 \end{array} \right.$$

y realizando un cambio de variables:

$$\begin{array}{l}
 \pi_1^* = (1+r)\pi_1 \quad \pi_2^* = (1+r)\pi_2 \quad \dots \quad \pi_n^* = (1+r)\pi_n \\
 \min w = \frac{1}{1+r} [V_1 \pi_1^* + V_2 \pi_2^* + \dots + V_n \pi_n^*] \\
 (D^n) \quad \text{sc} \\
 \pi_1^* (S_1) + \pi_2^* (S_2) + \dots + \pi_n^* (S_n) = S (1+r) \\
 \pi_1^* + \pi_2^* + \dots + \pi_n^* = 1 \\
 \pi_1^*, \pi_2^*, \dots, \pi_n^* \geq 0
 \end{array}$$

Y volviendo a escribir el problema anterior como:

$$\begin{array}{l}
 \min w^* (= w(1+r)) \\
 \text{sc} \\
 \begin{pmatrix} S_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \pi_1^* + \begin{pmatrix} S_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \pi_2^* + \dots + \begin{pmatrix} S_n \\ V_n \end{pmatrix} \pi_n^* = \begin{pmatrix} S(1+r) \\ w \end{pmatrix} \\
 \pi_1^* + \pi_2^* + \dots + \pi_n^* = 1 \\
 \pi_1^*, \pi_2^*, \dots, \pi_n^* \geq 0
 \end{array}$$

que así puede ser interpretado como obtener una combinación lineal convexa de los puntos en  $\mathbb{R}^2$  asociados a las parejas  $\begin{pmatrix} \text{precio} \\ \text{payoff} \end{pmatrix}$ , para cualquier valor de n, de tal manera que el valor de la segunda componente sea mínimo.

Al igual que en el ejemplo numérico, aquí también se concluye que una cota superior para el valor del derivado se obtiene con el mismo problema dual, excepto que esta vez se cambia el sentido de optimización: en lugar de minimizar  $w^*$  se maximiza su valor.

## Conclusión

Para obtener cotas inferiores y superiores para el valor de **cualquier** derivado sobre un subyacente que se modela a través de un árbol n-nomial, se procede de la siguiente manera:

- Se forman las n parejas  $\begin{pmatrix} S_i \\ V_i \end{pmatrix}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$
- Se grafican estos n puntos en un plano cartesiano
- Se construye gráficamente **Q**, la envolvente convexa de esos puntos
- Se grafica **L**, la recta vertical en  $S^*(1+r)$

- Se considera el segmento en la intersección de **L** con **Q**
- El extremo inferior del segmento corresponde a  $w^*_{\min}$
- El extremo superior del segmento corresponde a  $w^*_{\max}$
- Se determina algebraicamente el valor de ambos
- Se obtienen las cotas para  $V$ ,  $\frac{1}{1+r} w^*_{\min} \leq V \leq \frac{1}{1+r} w^*_{\max}$

Para determinar algebraicamente el valor de las ordenadas de cualquiera de estos puntos se ubica el segmento de la región **Q** donde se halla el punto; suponiendo que este segmento está definido por los puntos  $\begin{pmatrix} S_j \\ V_j \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} S_k \\ V_k \end{pmatrix}$  para algún par  $i, k$ , entonces se calcula la pendiente,  $\Delta$ , y la ordenada al origen,  $-B$ , de la recta correspondiente:

$$\Delta = \frac{V_j - V_k}{S_j - S_k}, \quad -B = V_j - \Delta S_j$$

obteniendo

$$w^* = \Delta S(1+r) - B$$

Si además se desean calcular las probabilidades riesgo-neutral

$$\pi_j^* = \frac{S(1+r) - S_k}{S_j - S_k}, \quad \pi_k^* = \frac{S_j - S(1+r)}{S_j - S_k}, \quad \pi_i^* = 0, i \neq j, k$$

## Referencias

Jarrow, Robert y Turnbull, Stuart, 2000. "Derivative Securities" South-Western College Publishing.

Taha, Hamdy A., 2004. "Investigación de Operaciones" México, Pearson Educación.