ESTUDIO DE LAS FLUCTUACIONES EXTREMAS DEL PRODUCTO INTERNO BRUTO DE MEXICO A PARTIR DEL PROCESO DE POISSON

Miguel Ángel Díaz Carreño y Pablo Mejía Reyes
Facultad de Economía de la Universidad Autónoma del Estado de México

RESUMEN

Esta investigación presenta la validación del supuesto de Proceso de Poisson no Homogéneo (PPNH) para la modelación estadística de las fluctuaciones extremas del PIB de México durante el periodo de 1980 a 2006. Teniendo en cuenta las variaciones porcentuales trimestrales del PIB, primeramente se validó, para periodos de seis años, que la distribución marginal de los tiempos de arribo (ocurrencias) de las fluctuaciones extremas fuera Poisson a partir de las estadísticas de Crámer-von Mises (Spinelli y Stephens, 1997). Posteriormente se probó si estas distribuciones marginales provenían de la misma población empleando la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis (Kruskal, 1952). Se observó que para aumentos del PIB mayores a 6 por ciento trimestral el supuesto de PPNH es adecuado en la modelación del problema. Además, para descensos más allá del 4 por ciento, el supuesto de PPNH también ha sido validado.

Palabras clave:* *Producto Interno Bruto, Fluctuación Extrema, Proceso de Poisson no Homogéneo (PPNH).
Clasificación JEL: C12, C13, C14.

INTRODUCCIÓN

En México, uno de los principales objetivos de política macroeconómica es el logro de un crecimiento económico alto que se traduzca en la fuente de generación de mayores niveles de empleo, ingreso y bienestar para la población. Sin embargo, por periodos prolongados de tiempo, el Producto Interno Bruto (PIB) del país no sólo no ha crecido, sino que ha presentado tasas de crecimiento negativas. En particular, durante la década de los ochenta, este fenómeno se observó reiteradamente; en tanto que en los noventa se registró el descenso del PIB más pronunciado de la historia, y a su vez, niveles de crecimiento más allá de su tendencia media.

Es posible observar que la investigación acerca de la trayectoria, así como de la predicción del Producto Interno Bruto (PIB) en México, presenta un enfoque econométrico clásico. Por ejemplo, Mejía (2003) investigó la existencia de dinámicas no lineales en doce variables macroeconómicas, entre ellas, el PIB, Exportaciones e Importaciones, mediante modelos autorregresivos de orden *q*, y evaluó si existía relación con comportamientos asimétricos a lo largo del ciclo económico mediante asimetría dinámica. Se utilizan dos enfoques para estudiar la dinámica de los ciclos económicos, el primero es el enfoque tradicional vinculado con la teoría de los ciclos económicos reales, y el segundo, con la metodología empírica.

Pérez (1995) elaboró un modelo econométrico de series de tiempo para pronosticar el Producto Interno Bruto (PIB). Presenta un modelo de equilibrio general de una economía abierta con dos sectores. A partir de este modelo se deriva una relación inversa entre producción y tipo de cambio real. Mejía y Hernández (1997) analizan el comportamiento de largo plazo del PIB real per-cápita de México (1934-1992) con el fin de determinar si este tiene una tendencia aleatoria o determinística a apartir del empleo de técnicas de series de tiempo.

Torres (2000) estudió las características del ciclo económico en México durante los últimos sesenta años y analiza su relación con la estabilidad de las variables nominales. El análisis se realiza desde una perspectiva empírica y con un énfasis especial en el desempeño de largo plazo de la economía mexicana. De los años cuarenta a los años setenta la economía mexicana experimentó un periodo de crecimiento económico sostenido y de estabilidad en las principales variables nominales. Por el contrario, a partir de los años ochenta se observa una tasa de crecimiento económico menor e inestabilidad en las variables nominales.

Garcés (2003) investigó la influencia que la integración económica con Estados Unidos ha tenido sobre el PIB mexicano durante el periodo 1980-2000. El análisis se basa en la estimación de relaciones de equilibrio de largo plazo y en los respectivos procesos de ajuste para el PIB mexicano y cada uno de sus componentes con el índice de la producción industrial de Estados Unidos y el tipo de cambio real bilateral.

Tanto los descensos extremos del PIB como la ocurrencia de tasas de crecimiento positivas muy altas en éste agregado son eventos poco frecuentes. Sin embargo, dada la influencia que tienen ambos acontecimientos sobre el bienestar de la población, resulta de gran relevancia la modelación estadística y econométrica de estos fenómenos con el propósito de conformar métodos alternativos de análisis y predicción.

El estudio de las fluctuaciones extremas del PIB en México poco ha sido tratado, la revisión de literatura en torno al tema muestra que el análisis de estas variables se ha centrado más sobre la modelación econométrica tradicional de series de tiempo acerca de la tendencia y pronóstico de las mismas.

En diversos estudios acerca de la trayectoria del PIB se ha propuesto el empleo de distintos modelos probabilísticos, tales como la distribución t de Student, la Normal, así como distribuciones del tipo gamma entre otras (Boothe y Glassman 1987, Nelson 1991). En esta investigación se aborda la modelación estadística paramétrica y no paramétrica de las fluctuaciones extremas del PIB empleando el Proceso de Poisson no Homogéneo (PPNH).

Hasta ahora el empleo del PPNH para la modelación de las variaciones extremas en variables de carácter macroeconómico poco se ha observado en las investigaciones realizadas al respecto (Villaseñor y Díaz, 2003). Por lo que, la incorporación de tal metodología prácticamente resulta novedosa en el tratamiento de estas problemáticas. De esta manera, el presente trabajo de investigación constituye uno de los primeros intentos por incorporar esta técnica al análisis macroeconómico en México. Lo que a su vez permitirá la disponibilidad de procedimiento estadísticos alternativos para el tratamiento de estos temas.

En esta investigación se busca proponer una alternativa de modelación estadística de las fluctuaciones extremas del PIB de México, la cual se basa en el Proceso de Poisson no Homogéneo (PPNH).

2. MARCO REFERENCIAL

El proceso estocástico $\{N(t); t \geq 0\}$, donde N(t) es el número de eventos que ocurrieron hasta el tiempo t , es llamado un PPNH con función de intensidad $\lambda(t)$ si:

i) N(0) = 0

ii) $\{N(t); t \geq 0\}$, tiene incrementos independientes; es decir, el número de eventos que ocurren en intervalos de tiempo ajenos son independientes.

iii) $P\{N(t+s) - N(t) = n\} = e^{-[\Lambda(t+s)-\Lambda(t)]} \cdot \dfrac{[\Lambda(t+s)-\Lambda(t)]^n}{n!}$ con: $n \geq 0$ (Ross, 1980)

Entonces, $N(t+s) - N(t)$ tiene una distribución Poisson con media $\Lambda(t+s) - \Lambda(t)$ y $N(t)$ se distribuye Poisson con media $\Lambda(t)$, por lo cual $\Lambda(t)$ es llamada función del valor medio del proceso y se define por $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$.

Nótese que si $\lambda(t)=\lambda$, entonces $\Lambda(t) = \lambda t$ y se tendrá un proceso Poisson homogéneo (PPH) con media λs (Kao, 1997).

Para determinar si un conjunto de eventos puede ser modelado como un PPNH, es necesario realizar la identificación del proceso a través de un método estadístico adecuado. Así, la modelación de las variaciones extremas del PIB bajo el proceso de Poisson implicará primeramente validar si el fenómeno puede ser realmente modelado mediante este procedimiento.

Un método de prueba para PPNH fue propuesto por Villaseñor y Díaz (2003), el cual se basa en una caracterización del PPNH presentada por Chouinard y McDonald (1985). Este considera el empleo de dos pruebas estadísticas, la prueba de bondad de ajuste de las estadísticas de Cramér-von Mises y la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis. Esta prueba de bondad de ajuste, que considera dos etapas, para procesos de Poisson mostró mayor potencia en la validación del supuesto respecto a las pruebas de Lewis (1964) y Ross (1990). Por lo que en este trabajo es empleada la prueba de Villaseñor y Díaz (2003), la cual se describe en seguida.

2.1 Caracterización del Proceso de Poisson no Homogéneo (PPNH)

Chouinard y McDonald (1985) presentan una caracterización del PPNH con base en la distribución de los intervalos de los tiempos de arribo.

Sean $\{N_1(t), N_2(t),\ldots,N_q(t);\ 0\leq t \leq T\}$ q repeticiones independientes del proceso $N(t)$, en donde $N_1(T) = n_1$, $N_2(T) = n_2$,..., $N_q(T) = n_q$ con n_i=número de eventos en la repetición i, i=1,2,…,q donde $n = n_1+n_2+\ldots+n_q$. Además, sean $\{S_{i(j)}\}_{j=1}^{n_i}$ los tiempos en que ocurren los eventos o tiempos de arribo y defínase a $R_{i(j)}$, i=1,...,q, j=1,...,n_i como el rango del j-ésimo tiempo de arribo del proceso $\{N_i(t);\ 0\leq t \leq T\}$ entre los n tiempos de arribos .

Proposición 1. Si $N(t)$ es un PPNH, entonces para toda q y todo conjunto $\{n_i\}_{i=1}^{q}$

$$P\{R_{i(j)}=k_{i(j)};\ i=1,\ldots,q,\ j=1,\ldots,n_i/N_i(T)=n_i;\ i=1,\ldots,q\} = \left(\frac{n!}{n_1!,n_2!,\ldots,n_q!}\right)^{-1}$$

donde $\{k_{i(j)}\}_{j=1}^{n_i}$ es una secuencia creciente de enteros distintos para cada i, $\{k_{i(j)};\ j=1,\ldots,n_i,\ i=1,\ldots,q\}=\{1,2,..,n\}$. Nótese que los rangos tienen distribución uniforme discreta.

Teorema 1. Si $N(t)$ es un PPNH sí y sólo sí:

a) la distribución marginal de N(T) es Poisson y
b) N(t) satisface la proposición 1.

Con base en esta caracterización, un método estadístico de prueba para PPNH debe considerar los rangos de las observaciones.

Nótese que la validación del supuesto de PPNH para un conjunto de eventos dependerá del cumplimiento de a) y b) del teorema 1. La prueba de la primera condición debe basarse en una prueba de bondad de ajuste para la distribución Poisson, y la de la segunda, en una prueba no paramétrica para igualdad de funciones de distribución.

El cumplimiento de estos supuestos se sustenta en la investigación de Villaseñor y Díaz (2003), quienes utilizan una prueba basada en las estadísticas de Cramér-von Mises (CVM) para la validación del inciso a) y la prueba de Kruskal-Wallis (KW) para el inciso b). Estos procedimientos se describen a continuación.

2.2 Estadísticas de Cramér-von Mises (CVM)

En este apartado se describe una prueba de bondad de ajuste basada en las estadísticas de CVM comúnmente usada para probar la hipótesis nula H_0: las variables n_i, i=1,2,…,q son una muestra aleatoria de alguna distribución discreta especificada[1].

Las variables aleatorias n_i pueden tomar cualquier valor entero no negativo. Sea p_j la probabilidad de que cualquiera de las variables aleatorias n_i tome el valor j. Supóngase además que se tienen q observaciones independientes de n_i; n_1, n_2, …, n_q. Sea o_j el número observado o frecuencia de las observaciones iguales a j, y $qp_j=e_j$ el número esperado de valores j, $W_j = \sum_{i=0}^{j}(o_i - e_i)$ y $H_j = \sum_{i=0}^{j} p_i$, donde i, j = 0,1,2,.... Las estadísticas de Cramér-von Mises están definidas por (Spinelli y Stephens, 1997):

$$W^2 = q^{-1}\sum_{j=0}^{\infty} W_j^2 p_j \qquad (1)$$

$$A^2 = q^{-1}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{W_j^2 p_j}{H_j(1-H_j)} \qquad (2)$$

[1] La revisión de literatura de pruebas de bondad de ajuste para la distribución de Poisson reveló que la prueba de CVM tiene mayor potencia contra distribuciones alternativas como la Binomial, Beta-Binomial, Binomial negativa y Uniforme discreta, todas con parámetros definidos (Spinelli y Stephens, 1997).

$$W_m^2 = q^{-1}\sum_{j=0}^{\infty} W_j^2 \qquad (3)$$

Al eliminar a p_j de (1) se asigna mayor peso a las desviaciones en los extremos y se obtiene la estadística (3) que puede dar mayor potencia contra distribuciones alternativas.

En general, cuando los parámetros de la distribución son desconocidos, estos deberán ser estimados con la muestra por un método eficiente. Sea $\hat{p}_j$ la probabilidad estimada del valor observado j y $\hat{e}_j$, $\hat{H}_j$ y $\hat{H}_j$ calculados reemplazando p_j con $\hat{p}_j$. Las estadísticas de Cramér-von Mises entonces serán calculadas de (1)-(3) usando $\hat{p}_j$, $\hat{W}_j$ y $\hat{H}_j$.

En la práctica, las sumas indicadas en (1)-(3) deberán ser finitas, según la información disponible. Además, cuando los parámetros son estimados, las expresiones (1)-(3) se modifican de la siguiente manera:

$$W^2 = q^{-1}\sum_{j=0}^{\infty} \hat{W}_j^2 \hat{p}_j \qquad (4)$$

$$A^2 = q^{-1}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\hat{W}_j^2 \hat{p}_j}{\hat{H}_j (1-\hat{H}_j)} \qquad (5)$$

$$W_m^2 = q^{-1}\sum_{j=0}^{\infty} \hat{W}_j^2 \qquad (6)$$

Para la distribución de Poisson, $p_j = \dfrac{\mu^j e^{-\mu}}{j!}$, $j = 0,1,2,...,$ el siguiente procedimiento permite probar la hipótesis H_0.

1) Calcular las estadísticas de (4)-(6), estimando a μ por la media muestral, $\bar{X} = q^{-1}\sum_{i=1}^{q} n_i$ [2].
2) Comparar el valor calculado de las estadísticas con su correspondiente valor de tablas de acuerdo con el valor estimado de la media.
3) Regla de decisión: rechazar H_0 al nivel de significancia α seleccionado, cuando el valor calculado de las estadísticas sea mayor al de tablas.

---

[2] La media muestral ($\bar{X}$) corresponde al estimador de máxima verosimilitud de la media poblacional (μ) de una distribución de Poisson.

2.3 Prueba de Kruskal-Wallis (KW)

Sean $S_{11},S_{12},...,S_{1n1}$; $S_{21},S_{22},...,S_{2n2}$; ...; $S_{q1},S_{q2},...,S_{qnq}$, q muestras aleatorias de tamaño n_i, con i=1,2,...,q que provienen de funciones de distribución desconocidas F_1, F_2, …, F_q. Se quiere probar la hipótesis nula:

H_0: $F_1(s) = F_2(s) = ... = F_q(s) = F(s)$ contra la alternativa

H_1: $Fi(s) = F(s - \theta_i)$ (para toda s, i=1,2,...,q), donde las θ_i son números reales no necesariamente iguales.

La estadística de prueba se define por:

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{q} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

donde $R_i = \sum_{j=1}^{ni} R_{ij}$ es la suma de los rangos de los n_i valores de la i-ésima muestra y H se distribuye aproximadamente como Ji-cuadrada con q-1 grados de libertad, χ^2_{q-1}, cuando $n_i \geq 5$ (Kruskal, 1952). Puesto que valores pequeños de H apoyan H_0, entonces se rechaza H_0 cuando $H > \chi^2_{\alpha,q-1}$.

3. RESULTADOS

En éste apartado se describen los principales resultados de la validación del supuesto de PPNH para las variaciones extremas del PIB en México durante 1980-2006. Para lo cual fueron empleados los procedimientos estadísticos correspondientes, tal como lo requiere la prueba del teorema 1 enunciado con anterioridad. Los datos utilizados son las variaciones trimestrales de los valores reales del PIB base 1993, los cuales fueron obtenidos del banco de información económica (BIE) del Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática (INEGI).

Los niveles de variación del PIB para los que se realizó la prueba fueron diversos. En primera instancia se consideró crecimientos superiores al 5%, así como descensos más allá del 3%.

El cuadro 1 resume los resultados de la aplicación de las pruebas correspondientes a la serie en estudio.

Cuadro1. Estadísticos para las pruebas de Cramer-von Mises y Kruskal-Wallis para la validación del supuesto de PPNH de las variaciones extremas del PIB en México.

Variaciones % negativas	μ	W^2	A^2	W_m^2	H
-3	1.20	0.1692	1.9360	1.7193	19.9
-4	2.20	0.0169	0.1980	0.1389	19.9
Variaciones % positivas	μ	W^2	A^2	W_m^2	H
5	3.2	0.1300	1.2501	1.0943	19.9
6	2.8	0.0353	0.1940	0.1834	19.9

Con base en la información mostrada en este cuadro 1 es posible observar que para variaciones negativas del PIB menores a 4 puntos porcentuales se rechazaría el supuesto de que la distribución marginal de las realizaciones de estas variaciones del PIB es Poisson, en virtud de que el estadístico A^2=1.9360 ha resultado mayor al valor crítico correspondiente A_C^2=1.191 teniendo en cuenta una significancia del 5%. En tanto que, para descensos del PIB mayores a 4% se tiene evidencia a favor de la distribución comentada debido a que en ningún caso los estadísticos de prueba son mayores a los valores críticos correspondientes al 5% de significancia[3]

Considerando las variaciones positivas del PIB, se encontró que para incrementos menores a 6% no es posible validar el supuesto de que la distribución marginal es

[3] Los valores críticos fueron obtenidos de (Spinelli y Stephens, 1997).

Poisson para dichos incrementos debido a que el estadístico A^2=1.2501 resultó mayor al valor crítico al 5%, este es de A_C^2=1.112. Por otra parte, también se encontró que para aumentos superiores al 6% es posible asumir que se satisface el supuesto que se está validando. Lo anterior como resultado de que ninguno de los estadísticos de la prueba superó a los valores críticos correspondientes.

Por otra parte de acuerdo con los resultados de la prueba de Kruskal-Wallis realizada sobre el conjunto de variaciones trimestrales del PIB del periodo considerado se encontró un estadístico de H=19.90 que comparado con el valor de chi-cuadrada con q-1 (5-1) grados de libertad y un nivel de significancia de 5% (9.488) permite no rechazar la hipótesis de que las observaciones correspondientes a las variaciones trimestrales del PIB en el periodo de estudio provienen de la misma distribución de probabilidad.

CONCLUSIONES

Por lo tanto, de acuerdo con los resultados mostrados por las dos pruebas que se requiere realizar para validar el supuesto de PPNH para las variaciones del PIB se tiene que, cuando dichas variaciones son superiores al 6% entonces es posible asumir el proceso como de Poisson; en tanto que para descensos más allá del 4% también será posible utilizar dicha metodología estadística, no así en el resto de los casos.

Finalmente, los resultados de esta investigación representan en realidad una alternativa adicional para la modelación estadística y econométrica de los cambios extremos del PIB en México. Hasta ahora, esta tarea sólo se ha realizado a través del empleo de la econometría clásica, como lo es la regresión lineal así como los análisis tradicionales de series de tiempo. Por lo que, en este documento ante todo, lo que se discute es la introducción de una técnica para el análisis del comportamiento del PIB, cuando este presenta una alta volatilidad o cambios extremos.

BIBLIOGRAFÍA

Chouinard A. and McDonald D. 1985. *A Characterization of Non-Homogeneous Poisson Processes*. Stochastics, 15: 113-119.

Bassin, W. M. 1973. A Bayesian optimal overhaul model for the Weibull restoration process. J. Am. Stat. Assoc. 68: 575-578.

Conover, W. J. (1980). Practical Nonparametric Statistics. 2nd. Edition. . John Wiley, New York.

Cox, D. R. 1955. Some statistical methods connected with series of events. JRSS. Ser. B. 17: 2, 129-164.

Daniel, W. W. (1990). Applied Nonparametric Statistics. 2nd. Edition. PWS-Kent Publishing Company, Boston.

Duane, J. T. 1964. *Learning curve approach to reliability monitoring. IEEE, Transactions on Aerospace*, AS-2: 563-566.

Garcés, D. D. (2002) *Análisis de las Funciones de Importación y Exportación de México 1980-2000.* Documento de Investigación No. 2002-12, Dirección General de Investigación Económica del Banco de México.

Garcés, D. D. (2003). *La relación de largo plazo del PIB de México y de sus componentes con la actividad económica en los Estado Unidos y con el tipo de cambio real.* Doc. 2003-4. Banco de México

González (2002) *La Dinámica del Consumo Privado en México. Un Análisis de Cointegración con Cambios de Régimen*. Documento de Investigación No. 2002-10, Dirección General de Investigación Económica del Banco de México.

Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (2007). Banco de Información Económica (BIE): Serie Trimestral del PIB a precios de 1993. www.inegi.gob.mx.

Kao, E. P. C. (1997). An Introduction to Stochastic Processes. Wadsworth, Melmont, California.

Kruskal, W. H. (1952). A nonparametric test for the several simple problem . The Annals of Mathematical Statistics, 23 (4): 525-540.

Larios, L. U. (1999). Pruebas de hipótesis para comparar poblaciones Poisson: estudio comparativo. Colegio de Posgraduados, Texcoco, México.

Lewis, P. A. W. (1964). *A Branching Poisson Processes Model for the Analysis of computer Failure Patterns*. J. Royal Statist. Soc. B, 26: 398-456.

López, S. L., Villaseñor, A. J., y Vaquera, H. (2002). Dos pruebas de bondad de ajuste para Procesos Poisson no Homogéneos. En Agrociencia., Vol 36, No. 6., pp. 703-712.

Mejía R. P. (2003). *No linelidades y asimetrías en los ciclos económicos de México.* Colegio de Mexiquense, Estado de México, México

Pérez, L. E. (1995). Un *modelo de cointegración para pronosticar el PIB en México*. Doc. No. 9504. Banco de México.

Pérez, L. E. (2004). *Un Modelo de Pronósticos de la Formación Bruta de Capital Privada de México***.** Documento de Investigación No. 2004-04, Dirección General de Investigación Económica del Banco de México.

Ross, S. M. (1990). *A Course in Simulation*. Macmillan, New York, NY.

Spinelli, J. J., And Stephens, M. A. (1997). Cramér-von Mises tests of fit for the Poisson Distribution. The Canadian Journal of Statistics, 25 (2), 257-268.

Torres, G. A. (2000). *Estabilidad en Variables Nominales y el Ciclo Económico: El Caso de México*, Documento de Investigación No. 2000-03, Dirección General de Investigación Económica del Banco de México.

Villaseñor, A.J. y Díaz C. M. (2003). Pruebas no Paramétricas para Procesos Poisson no Homogéneos. Agrociencia, Vol 37, No. 1., pp. 21-31.